Zur Approximation linearer Funktionale bei periodischen Funktionen

Fischer, Jan-Wilhelm

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 48, 1997, S.67-74

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Zur Approximation linearer Funktionale bei periodischen Funktionen

Von **Jan-Wilhelm Fischer***, Braunschweig

(Eingegangen am 10.10.97)

(Vorgelegt von H. Braß)

1. Einleitung und Hauptergebnis

Die Approximation linearer Funktionale ist ein Standard-Problem der Numerik. Für viele der anzunähernden linearen Funktionale werden in der Fachliteratur eine Reihe von Algorithmen vorgeschlagen. Es liegt daher nahe, ein Qualitätsmaß einzuführen und die Verfahren danach zu beurteilen. Insbesondere kann so nach den optimalen Algorithmen bzgl. eines gegebenen Qualitätsmaßes gesucht werden. Es hat sich jedoch gezeigt, daß die optimalen Algorithmen meist nur sehr schwer zu bestimmen sind. Außerdem sind die Formeln für verschiedene Qualitätsmaße i. allg. verschieden. Wünschenswert sind also einfach zu konstruierende Verfahren, die für möglichst viele verschiedene Qualitätsmaße nicht deutlich schlechter als die optimalen Verfahren sind.

Ein praktisch häufig auftretendes Problem ist die näherungsweise Bestimmung eines linearen Funktionals I, das auf dem linearen Raum $C^\star$ der 2π-periodischen stetigen Funktionen definiert ist. $C^\star$ sei dabei mit der Supremums-Norm versehen. Die Approximation von $I[f]$ soll die Funktionswerte $f\left(\alpha+\nu\frac{2\pi}{n}\right)$ $(\nu=0,\ldots,n-1)$ mit $n\in\mathbb{N}$ verwenden:

$$I[f]\approx Q[f]:=\sum_{\nu=0}^{n-1}a_\nu f(\alpha+\nu h)\ ,\qquad h=\frac{2\pi}{n}\,.$$

Da es sich um eine Approximation handelt, sind

$$\rho(Q)=\rho_s(Q):=\sup_{\|f^{(s)}\|\le 1}|I[f]-Q[f]|$$

und

$$\rho^{\mathrm{opt}}=\rho^{\mathrm{opt}}_{s,n}:=\inf\left\{\rho_s(Q):(a_0,\ldots,a_{n-1})\in\mathbb{R}^n\right\}$$

von Interesse. $\rho(Q)/\rho^{\mathrm{opt}}$ kann als ein Maß für die Qualität angesehen werden. Es sei nun Q eine Schätzformel der Gestalt

$$Q=I\circ\mathrm{intpol}\,,$$

* Dipl.-Math. J.-W. Fischer · Institut für Angewandte Mathematik, Abteilung Numerik · TU Braunschweig · Pockelsstraße 14 · 38106 Braunschweig

wobei intpol ein Interpolationsoperator, also eine lineare Abbildung von C^* nach $\mathcal{U} \subset C^*$ der Gestalt

$$\operatorname{intpol}[f] = \sum_{\nu=0}^{n-1} f(x_\nu)\, l_\nu\,, \qquad l_\nu \in \mathcal{U}\,,\ l_\nu(x_\mu) = \delta_{\nu\mu}$$

ist. Es gilt dann die folgende Ungleichung

$$\rho(Q) \leq (1+A)\, \rho^{\text{opt}}$$

mit

$$A := \sup_{\|f^{(s)}\| \leq 1} \|\operatorname{intpol}^{(s)}[f]\| \tag{1}$$

(zum Beweis siehe etwa Brass [2], [3]).

In dieser Arbeit soll nun gezeigt werden, daß bei Verwendung der trigonometrischen Interpolation $A \leq 8$ für alle $n \leq 1000$ gilt. Dies sind die praktisch interessanten Fälle. Wir erhalten somit stets eine Schätzformel Q, für die $\rho(Q)$ höchstens um den Faktor 9 schlechter als ρ^{opt} ist. Im Gegensatz zur trigonometrischen Interpolation bleiben die Konstanten A bei der Verwendung der Spline-Interpolation der Ordnung s mit wachsendem n beschränkt (siehe hierzu Brass [3]). Jedoch erhalten wir für jede Ableitungsordnung eine andere Schätzformel. Dies ist von erheblichem Nachteil.

Im weiteren bezeichnen wir eine Funktion t der Gestalt

$$t(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{l} a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x$$

als trigonometrischen Ausdruck l-ter Ordnung. $\mathcal{T}_l$ sei die Menge aller trigonometrischen Ausdrücke l-ter Ordnung. Ist n ungerade, bezeichnen wir mit intpol_n stets die gewöhnliche trigonometrische Interpolation. Ist n gerade, so sei intpol_n der eindeutig bestimmte Interpolationsoperator, der in den durch

$$\left\{1, \cos x, \sin x, \ldots, \cos\left(\frac{n}{2}-1\right)x, \sin\left(\frac{n}{2}-1\right)x, \cos\frac{n}{2}(x-\alpha)\right\}$$

aufgespannten linearen Raum abbildet (zur trigonometrischen Interpolation siehe etwa Zygmund [10] und Schoenberg [9]).

Das Hauptergebnis lautet nun

Satz *Für alle* $n \leq 1000$ *und* $s \in \mathbb{N}$ *gilt*

$$\sup_{\|f^{(s)}\| \leq 1} \|\operatorname{intpol}_n^{(s)}[f]\| \leq 8\,.$$

Bemerkung 1. Der Satz wird falsch, wenn die obere Schranke 8 durch 7 ersetzt wird.

2. Herleitung des Hauptergebnisses

Zunächst sei bemerkt, daß die Konstanten A bei der hier eingeführten trigonometrischen Interpolation nicht von α abhängen. Wir werden daher nur den Fall $\alpha = 0$ behandeln.

Im weiteren werden verallgemeinerte Euler-Splines benötigt.

Definition *Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ fest mit $\lambda \neq 1$. Die verallgemeinerten Euler-Polynome $E_\nu(\cdot, \lambda)$, $\nu = 0, 1, \ldots$ sind rekursiv durch*

(i) $E_0(x, \lambda) = 1$,

(ii) $E'_{\nu+1}(x, \lambda) = E_\nu(x, \lambda)$, $\quad \nu = 0, 1, \ldots$

(iii) $E_\nu(1, \lambda) = \lambda E_\nu(0, \lambda)$, $\quad \nu = 1, 2, \ldots$

definiert.

Definition *Der verallgemeinerte Euler-Spline $\mathcal{E}_\nu(x, \lambda)$ ist durch*

$$\mathcal{E}_\nu(x, \lambda) := \lambda^{\lfloor x \rfloor} E_\nu(x - \lfloor x \rfloor, \lambda), \qquad \lfloor x \rfloor := \sup\{i \,|\, i \in \mathbb{Z}, i \leq x\}$$

definiert.

$\mathcal{E}_\nu^{(\nu)}$ existiert und ist konstant auf jedem der Intervalle $[\tau, \tau + 1]$, $\tau \in \mathbb{Z}$. Weiter ist $\mathcal{E}_\nu\left(\frac{\cdot}{h}, e^{i\mu h}\right)$ eine 2π-periodische Funktion.

Im folgenden Lemma wird der sogenannte Peano-Kern K_s von intpol_n mit Hilfe der Euler-Splines angegeben.

Lemma 1. *Es sei $n, s \in \mathbb{N}$ und f eine 2π-periodische Funktion mit totalstetiger $(s-1)$-ter Ableitung, dann gilt:*

$$\mathrm{intpol}_n^{(s)}[f](x) = \int_0^{2\pi} f^{(s)}(y)\, K_s(y, x)\, dy$$

mit

$$K_s(y, x) = \frac{i^s}{2\pi} \sum_{\substack{\mu = -\frac{n-1}{2} \\ \mu \neq 0}}^{\frac{n-1}{2}} e^{-i\mu x} (\mu h)^s \left(1 - e^{-i\mu h}\right)^{-1} \mathcal{E}_{s-1}\left(\frac{y}{h}, e^{i\mu h}\right) \tag{2}$$

für ungerade n und

$$K_s(y, x) = \frac{i^s}{2\pi} \sum_{\substack{\mu = -\frac{n}{2} \\ \mu \neq 0}}^{\frac{n}{2}}{}'' e^{-i\mu x} (\mu h)^s \left(1 - e^{-i\mu h}\right)^{-1} \mathcal{E}_{s-1}\left(\frac{y}{h}, e^{i\mu h}\right) \tag{3}$$

für gerade n, wobei $\sum''$ bedeutet, daß der erste und letzte Summand der Reihe halbiert wird.

Beweis: Mit Hilfe der 2π-Periodizität der K_s erhalten wir aus

$$\int_0^{2\pi} f^{(s)}(y)\, K_s(y,x)\, dy$$

durch $(s-1)$-fache partielle Integration

$$(-1)^{s-1} \int_0^{2\pi} f'(y)\, \tilde{K}_s(y,x)\, dy \quad \text{mit } \tilde{K}_s(y,x) = \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{s-1} K_s(y,x) \; .$$

Für gerade n ergibt sich

$$\begin{aligned} &(-1)^{s-1} \int_0^{2\pi} f'(y)\, \tilde{K}_s(y,x)\, dy \\ &= \frac{-h}{2\pi} \sum_{\substack{\mu=-\frac{n}{2} \\ \mu\neq 0}}^{\frac{n}{2}}{}'' (-i\mu)^s e^{-i\mu x} \left(1-e^{-i\mu h}\right)^{-1} \sum_{\kappa=0}^{n-1} \left(f(x_{\kappa+1}) - f(x_\kappa)\right) e^{i\mu x_\kappa} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{\substack{\mu=-\frac{n}{2} \\ \mu\neq 0}}^{\frac{n}{2}}{}'' \left(\sum_{\kappa=0}^{n-1} f(x_\kappa)\, e^{i\mu x_\kappa}\right) (-i\mu)^s e^{-i\mu x} \\ &= \operatorname{intpol}_n^{(s)}[f](x) \; . \end{aligned}$$

Für ungerade n kann die Aussage entsprechend bewiesen werden. ■

Mit diesem Lemma können für gegebene x, n, s die Konstanten

$$\sup_{\|f^{(s)}\|\leq 1} |\operatorname{intpol}_n^{(s)}[f](x)| = \inf_{c\in\mathbf{R}} \int_0^{2\pi} |K_s(x,y) - c|dy \tag{4}$$

bestimmt werden. Möchte man Schranken für die Konstanten A aus (1) erhalten, so reicht es aufgrund des folgenden Lemmas aus, sich auf die Fälle $x = \frac{h}{8}$ und $x = \frac{3h}{8}$ zu beschränken.

Lemma 2. *Für* $n, s \in \mathbb{N}$ *gilt*

$$\sup_{\|f^{(s)}\|\leq 1} \|\operatorname{intpol}_n^{(s)}[f]\| \leq \sec\frac{\pi}{8} \max\left\{ \sup_{\|f^{(s)}\|\leq 1} |\operatorname{intpol}_n^{(s)}[f]\left(\tfrac{h}{8}\right)|, \right.$$
$$\left. \sup_{\|f^{(s)}\|\leq 1} |\operatorname{intpol}_n^{(s)}[f]\left(\tfrac{3h}{8}\right)| \right\} .$$

Beweis: Es sei sei f_0 eine 2π-periodische Funktion mit totalstetiger $(s-1)$-ter Ableitung für die an einem $x_0 \in [0, 2\pi)$ das Supremum angenommen wird. Ohne Einschränkung kann angenommen werden, daß $0 \leq x_0 \leq \frac{h}{2}$ und

$$\sup_{\|f^{(s)}\|\leq 1} \|\operatorname{intpol}_n^{(s)}[f]\| = \operatorname{intpol}_n^{(s)}[f_0](x_0)$$

gilt. Es wird nun das folgende Lemma benötigt.

Lemma 3. *(Riesz [8])*
Ist t ein trigonometrischer Ausdruck m-ter Ordnung mit $t(\tilde{y}) = \|t\|$, so gilt für $|y| \leq \frac{\pi}{m}$

$$t(\tilde{y} + y) \geq \|t\| \cos my .$$

Also gilt für $|x| \leq \frac{h}{8}$

$$\operatorname{intpol}_n^{(s)}[f_0](x_0 + x) \geq \sup_{\|f^{(s)}\| \leq 1} \|\operatorname{intpol}_n^{(s)}[f]\| \cos\frac{\pi}{8}$$

und damit für alle $|x - x_0| < \frac{h}{8}$

$$\sup_{\|f^{(s)}\| \leq 1} \|\operatorname{intpol}_n^{(s)}[f]\| \leq \sup_{\|f^{(s)}\| \leq 1} |\operatorname{intpol}_n^{(s)}[f](x)| \sec\frac{\pi}{8} .$$

Hieraus erhalten wir die zu beweisende Aussage. ■

Für das nächste Lemma benötigen wir die Fourierteilsummenoperatoren

$$S_n[f] := \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \cos\nu x + b_\nu \sin\nu x$$

mit

$$a_\nu = a_\nu[f] := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos\nu x dx , \qquad b_\nu = b_\nu[f] := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin\nu x dx .$$

Lemma 4. *Für $n \geq 1$ und $s \geq 2$ gilt*

$$\sup_{\|f^{(s)}\| \leq 1} \|\operatorname{intpol}_{2n-1}^{(s)}[f]\| \leq \|S_{n-1}\| + \frac{\pi^2}{4}\left(\frac{n+1/2}{2s+1}\right)^{1/2}$$

sowie

$$\sup_{\|f^{(s)}\| \leq 1} \|\operatorname{intpol}_{2n}^{(s)}[f]\| \leq \tfrac{1}{2}\left(\|S_{n-1}\| + \|S_n\|\right) + \frac{2}{\pi} + \frac{\pi^2}{4}\left(\frac{n}{2s+1}\right)^{1/2} + \frac{1}{3^{s-1}}$$

Beweis: Es sei $\sigma_n = \frac{1}{2}(S_n + S_{n-1})$. Mit der Dreiecksungleichung ergibt sich dann für jede Funktion $f \in C^\star$

$$|\operatorname{intpol}_{2n}^{(s)}[f](x)| = |-\sigma_n^{(s)}[f](x) + \sigma_n^{(s)}[f](x) - \operatorname{intpol}_{2n}^{(s)}[f](x)| \leq |t_1| + |t_2| \tag{5}$$

mit

$$t_1(x) = \sigma_n^{(s)}[f](x) , \qquad t_2(x) = \sigma_n^{(s)}[f](x) - \operatorname{intpol}_{2n}^{(s)}[f](x) .$$

Aus der Definition von $\sigma_n[f]$ folgt unmittelbar

$$\|\sigma_n\| \leq \tfrac{1}{2}\left(\|S_{n-1}\| + \|S_n\|\right) . \tag{6}$$

Stellen wir die Funktion f als trigonometrische Reihe

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x)$$

dar, ergibt sich

$$\begin{aligned}\mathrm{intpol}_{2n}[f](x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{n-1}(a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x) + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{(2\nu-1)n} \cos nx \\ &\quad + \sum_{\lambda=1}^{\infty} \sum_{\nu=-n+1}^{n-1} (a_{2\lambda n+\nu} \cos \nu x + b_{2\lambda n+\nu} \sin \nu x)\,.\end{aligned}$$

Für t_2 folgt somit

$$\begin{aligned}|t_2(x)| &= \Bigg|\frac{1}{2}\left(-a_n n^s \cos\left(nx + s\frac{\pi}{2}\right) + b_n n^s \sin\left(nx + s\frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &\quad - \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{(2\nu+1)n} n^s \cos\left(nx + s\frac{\pi}{2}\right) \\ &\quad - \sum_{\lambda=1}^{\infty} \sum_{\nu=-n+1}^{n-1} \left(a_{2\lambda n+\nu}\nu^s \cos\left(\nu x + s\frac{\pi}{2}\right) + b_{2\lambda n+\nu}\nu^s \sin\left(\nu x + s\frac{\pi}{2}\right)\right)\Bigg| \\ &\leq \frac{2}{\pi} + n^s \sum_{\nu=1}^{\infty} |a_{(2\nu+1)n}| + \sum_{\lambda=1}^{\infty} \sum_{\nu=-n+1}^{n-1} (a_{2\lambda n+\nu}^2 + b_{2\lambda n+\nu}^2)^{1/2}\nu^s\,. \qquad (7)\end{aligned}$$

Die drei Summanden werden nun einzeln abgeschätzt. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left|a_n n^s \cos\left(nx + s\frac{\pi}{2}\right) - b_n n^s \sin\left(nx + s\frac{\pi}{2}\right)\right| \\ &= \frac{n^s}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} f(t)\left(\cos nt \cos\left(nx + s\frac{\pi}{2}\right) - \sin nt \sin\left(nx + s\frac{\pi}{2}\right)\right) dt\right| \\ &= \frac{n^s}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} f(t) \cos\left(n(t+x) + s\frac{\pi}{2}\right) dt\right| \\ &= \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} f^{(s)}(t) \cos n(t+x) dt\right| \leq \frac{2}{\pi}\|f^{(s)}\|\,. \qquad (8)\end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}n^s \sum_{\nu=1}^{\infty} |a_{(2\nu+1)n}| &\leq n^s \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{((2\nu+1)n)^s}(a_{(2\nu+1)n}^2 + b_{(2\nu+1)n}^2)^{1/2}((2\nu+1)n)^s \\ &\leq \left[\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(2\nu+1)^s}\right]\left[\sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu^2 + b_\nu^2)\nu^{2s}\right]^{1/2} \\ &\leq \left(\frac{\pi^2}{8} - 1\right)\frac{9}{3^s}\left[\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[f^{(s)}(x)]^2 dx\right]^{1/2} \leq \frac{1}{3^{s-1}}\|f^{(s)}\| \qquad (9)\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
&\sum_{\lambda=1}^{\infty}\sum_{\nu=-n+1}^{n-1}(a_{2\lambda n+\nu}^2+b_{2\lambda n+\nu}^2)^{1/2}\nu^s \\
&\le \sum_{\lambda=1}^{\infty}\left[\sum_{\nu=-n+1}^{n-1}(a_{2\lambda n+\nu}^2+b_{2\lambda n+\nu}^2)\sum_{\nu=-n+1}^{n-1}\nu^{2s}\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\le \sqrt{2}\left[\sum_{\nu=1}^{n-1}\nu^{2s}\right]^{1/2}\sum_{\lambda=1}^{\infty}\left[\sum_{\kappa=(2\lambda-1)n+1}^{\infty}(a_\kappa^2+b_\kappa^2)\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\le \sqrt{2}\left[\sum_{\nu=1}^{n-1}\nu^{2s}\right]^{1/2}\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{1}{[(2\lambda-1)n]^s}\left[\sum_{\kappa=(2\lambda-1)n}^{\infty}(a_\kappa^2+b_\kappa^2)\kappa^{2s}\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\le 2\left[\sum_{\nu=1}^{n-1}\nu^{2s}\right]^{1/2}\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{1}{[(2\lambda-1)n]^s}\|f^{(s)}\| \\
&\le 2\|f^{(s)}\|\frac{n^{s+1/2}}{\sqrt{2s+1}\,n^s}\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{1}{(2\lambda-1)^s}\le\frac{\pi^2}{4}\left(\frac{n}{2s+1}\right)^{1/2}\|f^{(s)}\|\,. \qquad (10)
\end{aligned}$$

Die drei oberen Schranken (8), (9) und (10) ergeben nun mit den Beziehungen (5), (6) und (7) die zu beweisende Aussage für gerade Stützstellenanzahl.

Der Fall ungerader Stützstellenanzahl läßt sich mit Hilfe der Definition $\sigma_n[f] := S_{n-1}[f]$ entsprechend beweisen. ∎

Die Berechnung der Normen des Fourierteilsummenoperators bereitet mit dem in Gronwall ([6], Gl. (22)) angegeben Ausdruck keine Probleme. Für jede Stützstellenanzahl kann nun ein s_0 angegeben werden, so daß die oberen Schranken in Lemma 4 für alle $s \ge s_0$ kleiner als 8 sind. Die fehlenden Fälle des Hauptergebnisses müssen explizit nachgerechnet werden. Hierzu wurde die aus Gleichung (4) und Lemma 2 unmittelbar folgende Beziehung

$$\sup_{\|f^{(s)}\|\le 1}\|\,\mathrm{intpol}_n^{(s)}[f]\| \le \sec\frac{\pi}{8}\max\left\{\int_0^{2\pi}|K_s(\tfrac{h}{8},y)|dy,\int_0^{2\pi}|K_s(\tfrac{3h}{8},y)|dy,\right\}$$

verwendet.

Die obigen Integrale können für die Ableitungsordnungen $s = 1, 2$ leicht exakt bestimmt werden. Für $s \ge 3$ wurden die Integrale mit der Trapezformel angenähert. Um eine gesicherte obere Schranke zu erhalten wurde der Quadraturfehler mit Hilfe der ersten Ableitung nach oben abgeschätzt. Es muß daher noch die erste Ableitung $\frac{\partial}{\partial y}K_s(x,y)$ untersucht werden. Hilfreich ist hier die Darstellung der Euler-Splines als Fourierreihe. Durch mehrfache partielle Integration erhalten wir

$$\mathcal{E}_s\left(\frac{y}{h},e^{i\mu h}\right) = h^{-s-1}(1-e^{-i\mu h})\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\frac{e^{i(\nu n+\mu)}}{(i(\nu n+\mu))^{s+1}}\,. \qquad (11)$$

Hieraus läßt sich mit Gleichung (2) bzw. (3) und etwas Rechnung die obere Schranke $\frac{\pi}{32}n^2$ für die erste Ableitung der Peano-Kerne K_s bei n Stützstellen herleiten.

Bei der Bestimmung der Peano-Kerne mit Lemma 1 treten Euler-Splines hohen Grades auf. Für die Bestimmung der zugehörigen Euler-Polynome eignet sich aus Gründen der numerischen Stabilität die angegebene Rekursionsvorschrift nicht. Problematisch sind die Berechnungen der konstanten Glieder. Auch hier ist wieder die Darstellung (11) der Euler-Splines hilfreich. Das konstante Glied der Euler-Polynome kann damit in beliebiger Genauigkeit ermittelt werden.

Um numerisch gesicherte Ergebnisse zu erhalten, wurde für das gesamte Computerprogramm eine Fehlerrechnung durchgeführt.

Die Bemerkung 1 folgt aus der Betrachtung von $\sup_{\|f'\|\le 1} |\operatorname{intpol}'_{999}[f](0)|$. Für den zugehörigen ersten Peano-Kern gilt

$$\inf_{c\in\mathbb{R}} \int_0^{2\pi} |K_1(y,0) - c|dy = 7.72\ldots .$$

Bemerkung 2. Mit der hier beschriebenen Beweismethode wurde für alle $n \le 1000$ und $s \in \mathbb{N}$ auch

$$\sup_{\|f^{(s)}\|\le 1} \|\operatorname{intpol}_n^{(s)}[f]\| \le \frac{\pi}{2}\|\operatorname{intpol}_n\| \tag{12}$$

nachgewiesen.

Für die Berechnung der Normen der Interpolationsoperatoren können die in Ehlich/Zeller [4] angegebenen Identitäten verwendet werden.

Die Beziehung (12) wird in Haverkamp [7] für beliebige ungerade n bezüglich der ersten Ableitung nachgewiesen (siehe hierzu auch Forst/Hohl [5]). Haverkamp gibt auch Schranken für höhere Ableitungsordnungen an, diese sind jedoch in Brass [1] zu

$$\sup_{\|f^{(s)}\|\le 1} \|\operatorname{intpol}_n^{(s)}[f]\| \le (1+\pi)\|\operatorname{intpol}_n\|,$$

mit $n, s \in \mathbb{N}$ verbessert worden.

Literatur

[1] H. BRASS: *Universal quadrature rules in the space of periodic functions.* In: H. Brass / G. Hämmerlin (eds.): *Numerical Integration III.* Int. Ser. Numer. Math. 119 (1988), Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin. 16–24.

[2] H. BRASS: *Zur Konstruktion fast-optimaler Algorithmen der Numerik.* Abh. Braunschw. Wiss. Ges. 46 (1995), 71–78.

[3] H. BRASS: *On the quality of algorithms based on spline interpolation.* Numer. Algorithms 13 (1996), 159–177.

[4] H. EHLICH / K. ZELLER: *Auswertung der Normen von Interpolationsoperatoren.* Math. Z. 93 (1966), 142–143.

[5] W. FORST / A. HOHL: *Lebesguekonstanten bei der numerischen Differentiation periodischer Funktionen.* J. Approximation Theory 47 (1986), 75–84.

[6] T. H. GRONWALL: *Über die Lebesgueschen Konstanten bei den Fourierschen Reihen.* Math. Annal. 72 (1912), 244–261.

[7] R. HAVERKAMP: *Approximationsgüte der Ableitungen bei trigonometrischer Interpolation.* Math. Z. 179 (1982), 59–67.

[8] M. RIESZ: *Eine trigonometrische Interpolationsformel und einige Ungleichungen für Polynome.* Jahresber. Deutsche Math. Ver. 23 (1914), 354–368.

[9] J. J. SCHOENBERG: *Notes on spline functions I.* Indig. Math. Ver. 34 (1972), 412–422.

[10] A. ZYGMUND: *Trigonometric series*, second edition, Cambridge University Press.